

Line graphs e contrazioni: un approccio rigoroso alla space syntax

Roberto D'Autilia,
 www.formulas.it: Laboratorio di Matematica,
 Dipartimento di Architettura,
 Università degli Studi Roma Tre
 roberto.dautilia@uniroma3.it

2015-03-14

Abstract

I metodi della *space syntax* sono stati oggetto di una vasta discussione e di diverse proposte di modifica degli algoritmi per la costruzione delle linee assiali. La *space syntax* è rappresentabile in termini di grafi definiti sugli *edge* di un grafo primario (*line graph*). Per mezzo degli algoritmi di *line graph*, un sistema di etichette definite sugli *edge* del grafo primario si trasforma in un sistema di etichette sui vertici del *line graph*. Un algoritmo di contrazione di *edge* adiacenti con la stessa etichetta permette di costruire un grafo più generale di quelli generati con i metodi della *space syntax*. Per mezzo delle funzioni implementate in Mathematica è quindi possibile ridefinire la *space syntax* su un sistema qualsiasi di variabili (etichette) e riprodurre i risultati delle linee assiali come caso particolare. Come esempio viene discussa una possibile applicazione acustica del metodo.

1 Introduzione

La teoria della *space syntax* raccoglie alcuni metodi formali per studiare l'accessibilità e altre proprietà degli spazi urbani. Partendo dal lavoro di Hillier [7] la *space syntax* è stata sviluppata e applicata a numerosi casi di studio e ha stimolato la produzione di *software* che ne implementano i metodi.

Le variabili sulle quali si fonda la teoria sono le isoviste e le corrispondenti linee assiali che interagiscono per mezzo della loro intersezione [16]. Una linea assiale identifica uno spazio aperto. Quando due linee assiali si intersecano, allora si ha un'interazione tra i due spazi corrispondenti che dà luogo ad una connessione diretta e quindi alla possibilità di passare da uno spazio all'altro.

Questo modello dello spazio urbano ha fornito una grande quantità di risultati e un punto di vista originale sulla struttura e sulle funzioni della città [9][16][2], ma ha anche dato vita a un dibattito sulla sua generalità e su alcune potenziali incongruenze [13][8][14]. Alcuni autori hanno analizzato il possibile conflitto tra la rappresentazione delle caratteristiche topologiche e geometriche dello spazio urbano, evidenziando una apparente mancanza di robustezza del metodo rispetto a piccole modifiche della geometria della città [13][8].

In ambito fisico-matematico è stato invece mostrato come i modelli della *space syntax* possono essere riformulati in termini di teoria dei grafi [19], associando un nodo ad ogni linea assiale e connettendo due nodi con un *edge* se le corrispondenti linee si intersecano. Inoltre è stato anche mostrato che questa analisi dello spazio urbano è legata all'esplorazione casuale, cioè alle misure stazionarie di un *random walk* su un grafo [6], e sono stati realizzati diversi strumenti numerici [17] che identificano questi grafi a partire dagli spazi aperti, dalle loro linee assiali e dalle loro intersezioni.

Se definiamo un grafo primario G_p su una mappa urbana come il grafo che localizza i nodi sugli incroci stradali e identifica gli *edge* con strade e piazze, i grafi assiali sono legati, in un modo che vedremo in dettaglio nei prossimi paragrafi, al *line graph* di G_p , cioè al grafo sugli *edge* tale che due nodi sono connessi se i corrispondenti *edge* del grafo primario sono adiacenti [4]. Sembra quindi naturale cercare un procedimento

rigoroso per ottenere i risultati della *space syntax* partendo solamente dai grafi primari e dai corrispondenti *line graph*.

In questo ambito sono state fatte diverse proposte con lo scopo principale di risolvere il problema di trovare una continuità strutturale tra spazi adiacenti che potrebbero non essere connessi da un'unica linea assiale, proposte che vanno dalla misura degli angoli di inclinazione tra le linee assiali [16] all'introduzione di proprietà definite sugli *edge*, come per esempio i nomi delle vie [11].

Per risolvere questo problema abbiamo introdotto e implementato in Mathematica un metodo per ottenere i risultati della *space syntax* direttamente dai grafi primari, sfruttando le funzioni per la costruzione di *line graph* e la contrazione di grafi. Gli ingredienti del modello sono i grafi primari, facilmente identificabili direttamente o con algoritmi di processamento di immagini [12], e un sistema generico di *label* associate agli *edge* del grafo primario. In questo modo il problema dell'identificazione della *space syntax* viene spostato sui metodi di identificazione delle *label* e quindi sulla misura di generiche variabili urbanistiche, non necessariamente legate alle linee assiali. L'algoritmo proposto nei prossimi paragrafi ritrova la *space syntax* "tradizionale" come caso particolare, sanando anche alcune delle apparenti incongruenze, ma amplia anche la teoria includendo fenomeni urbani che non sono direttamente connessi a esperienze visuali.

Come applicazione del metodo viene costruita una *space syntax* acustica, cioè una mappa topologica della città che rappresenta lo spazio urbano sulla base delle sue qualità acustiche, proprietà che possono essere percepite da un non vedente, o anche solo dall'udito di chi si muove nella città.

Il lavoro è organizzato nel modo seguente. Nel prossimo paragrafo viene data una breve descrizione dei risultati e dei metodi della *space syntax*. Nel paragrafo successivo verranno introdotte le definizioni di grafo primario G_p etichettato e del corrispondente *line graph* contratto. Viene poi studiato un caso elementare per esemplificare il funzionamento del metodo. Infine viene analizzato un caso reale in cui le etichette degli *edge* rappresentano il livello di inquinamento acustico di un quartiere di Roma. Nelle conclusioni sono indicate alcune possibili vie di sviluppo di questi metodi.

1.1 La *space syntax*

La definizione che Hillier, Hanson e Graham danno nel 1987 della *space syntax* [1], riportata in [13], evidenzia come alla base della teoria ci siano le configurazioni spaziali della città, ma non indica alcuna grandezza che sia rappresentativa di queste configurazioni:

"Space syntax ... is a set of techniques for the representation, quantification, and interpretation of spatial configuration in buildings and settlements. Configuration is defined in general as, at least, the relation between two spaces taking into account a third, and, at most, as the relations among spaces in a complex taking into account all other spaces in the complex. Spatial configuration is thus a more complex idea than spatial relation, which need invoke no more than a pair of related spaces."

Nello sviluppo della *space syntax* l'esperienza visuale, come è naturale, è stata dominante. Il modello privilegia la percezione visiva degli spazi, ma gli spazi urbani possono essere percepiti anche con l'udito, con altri sensi e in generale le loro caratteristiche possono essere misurate con uno strumento. Questo approccio da una parte è stato molto proficuo per la comprensione di come viene percepita la città da chi la attraversa, dall'altra ha limitato in qualche senso il quadro urbanistico.

Una persona che si muove nella città la "sente" anche come suono, come odore, come densità di folla, come pericolo, come riferimenti culturali o come il risultato del comportamento di altre variabili non immediatamente identificabili con la vista. L'aspetto visuale è certamente dominante, ma le prospettive spaziali sono solo una delle possibili variabili che identificano gli spazi. L'analisi di [13] è forse un po' condizionata da questo punto di vista nella critica alla poca robustezza del metodo delle linee assiali rispetto a piccole modifiche della struttura urbana. In [13] viene infatti sottolineato che le proprietà topologiche della *space syntax* non colgono alcuni aspetti della città che sono connessi alle proprietà metriche e viene messo in evidenza che le linee assiali possono spezzarsi se si deforma leggermente il tessuto urbano.

È quindi necessaria una corretta e più generale definizione delle linee assiali, o dei nodi dei corrispondenti grafi, che porti ad una generalizzazione della *space syntax* e alla possibilità di considerare anche variabili e

grandezze che non sono di tipo visuale.

La perdita di riferimenti spaziali è conseguenza del fatto che le linee assiali non possono essere collocate in un punto dello spazio. Più in generale, se geolocalizziamo un grafo per mezzo delle coordinate dei suoi nodi, il corrispondente *line graph* non sarà comunque geolocalizzato. I *line graph* danno informazioni sulla connettività dello spazio, ma perdono le possibili proprietà metriche del grafo primario.

Tuttavia, in contrasto con quanto suggerito in [13], non tutti gli aspetti della rappresentazione topologica del reticolo urbano sono stati approfonditi e il modello, come vedremo, se opportunamente formalizzato, può essere ancora fonte di utili informazioni. Inoltre la connettività non deve essere necessariamente spaziale, la città può connettere servizi, comportamenti, emergenze e ciascuna variabile determina una propria connettività.

Resta il problema di come definire il sistema di etichette, quindi la scelta delle variabili definite sugli spazi aperti, ma questo problema, di pertinenza degli urbanisti, è un problema di scelta delle variabili da studiare e delle metodologie per misurarle. Le linee assiali sono facilmente identificabili dalla geometria dello spazio, ma possono anche essere misurate direttamente negli spazi reali. Partendo da questa considerazione ogni proprietà direttamente misurabile di uno spazio aperto è una variabile definita su un grafo primario. È possibile quindi misurare il livello della criminalità, dei servizi, la densità abitativa, i prezzi immobiliari e osservare che lo spazio urbano mette in relazione i diversi valori di queste variabili.

2 I grafi urbani

Proviamo allora a ridefinire la teoria seguendo e generalizzando il lavoro di Crucitti, Latora e Porta [3], cercando anche di riordinare la terminologia sull'argomento che in letteratura è un po' disordinata. In [19] per esempio viene usato il termine "duale" per identificare il grafo assiale della *space syntax*, ma nel linguaggio della teoria dei grafi la dualità indica un altro tipo di trasformazione di un grafo [4]. Inoltre a differenza dei grafi spazialmente duali, i grafi assiali non sono involutivi.

Definiamo **grafo primario geolocalizzato** o semplicemente **grafo primario** G_p , un grafo i cui *edge* sono gli spazi aperti di una mappa urbana e i nodi sono gli incroci tra questi spazi. Ad ogni nodo sono quindi associate le sue coordinate spaziali. Per esempio possiamo pensare che una strada che ne incrocia altre (fig.1) sia rappresentata da un *edge*, mentre i due incroci ai suoi estremi saranno nodi.

Questo tipo di rappresentazione, per quanto intuitiva e immediata, non è però univoca. Per esempio una piazza circolare con una fontana al centro può essere rappresentata come un ciclo chiuso o come un unico nodo. Un opportuno sistema di etichette sugli *edge* di G_p , insieme al processo di contrazione che verrà definito, può però rendere coerenti diversi grafi primari che rappresentano gli stessi spazi aperti. Il grafo primario appena descritto può essere estratto dalla mappa di una città anche per mezzo di un semplice procedimento di analisi dell'immagine [12]. Diamo quindi la seguente definizione.

Definizione 1 (Grafo Primario Geolocalizzato).

*Un grafo primario geolocalizzato G_p è la coppia (V, E) dove V è un insieme di coordinate geografiche in \mathbb{R}^2 , mentre $E \subseteq V \times V$. Inoltre su E è definita una mappa $c : E \rightarrow C$ che associa un'etichetta di un generico insieme $c \in C$ ad ogni *edge* $e \in E$.*

Nel seguito tratteremo solo grafi non diretti. In genere G_p è quasi planare, nel senso che possono esserci pochi *edge* che corrispondono a ponti o a strutture sovrapposte che ne alterano la planarità. Inoltre due nodi con le stesse coordinate possono essere distinti se utilizziamo le coordinate in \mathbb{R}^3 invece delle coordinate in \mathbb{R}^2 . In questo caso due nodi che hanno le stesse coordinate spaziali (x, y, z) sono lo stesso nodo. Per semplicità di rappresentazione assumiamo che le coordinate di G_p siano in \mathbb{R}^2 .

Ad ogni *edge* di G_p associamo una variabile a valori in C , che misura una proprietà urbanistica. Naturalmente questa non è una colorazione del grafo perché *edge* adiacenti possono avere lo stesso colore. Nel caso particolare della *space syntax* le etichette, o i colori, rappresentano le linee assiali, ma, per come abbiamo

definito G_p , la stessa linea assiale può esser spezzettata in *edge* che hanno la stessa etichetta come mostrato in fig.1.

Come abbiamo detto, le etichette possono indicare per esempio i nomi delle strade, il tipo di strada, la portata, le linee assiali, il livello di inquinamento o qualsiasi altra caratteristica urbana misurabile ed associabile a un *edge*. Per costruire il **grafo urbano** corrispondente al grafo assiale nel caso particolare in cui le etichette identificano una stessa linea di vista, abbiamo bisogno della nozione di *line graph* [4].

Definizione 2 (Line Graph). *Dato un grafo $G = (V, E)$ il corrispondente line graph $L(G)$ è il grafo su E tale che due nodi di $L(G)$ sono connessi se i due corrispondenti *edge* sono adiacenti in G .*

È evidente che se anche G è un grafo planare, il corrispondente *line graph* non sarà in generale un grafo planare. Nel *line graph* si perdono quindi tutte le caratteristiche spaziali del grafo di partenza, ma si ottengono informazioni sulla topologia e sulla connettività dello spazio urbano che viene rappresentato. Ad esempio un nodo di G di grado d diventa una *clique* di $L(G)$ cioè un sottoinsieme di un grafo in cui tutti i nodi sono reciprocamente connessi. Il *line graph* di G_p risulta quindi più interessante, urbanisticamente, del grafo primario, perché possiede una maggiore varietà di distribuzione del grado.

Quando costruiamo il *line graph* $L(G_p)$ di un grafo urbano con etichette, le etichette degli *edge* di G_p vengono associate ai corrispondenti nodi di $L(G_p)$. Otteniamo quindi un nuovo grafo, non planare e con i nodi etichettati. Questo grafo non è, a parte casi particolari, lo stesso grafo assiale della *space syntax* neanche quando le etichette indicano correttamente le linee assiali. Per esempio nel caso di un fenomeno di *urban sprawl* (fig.1) non si ottiene una stella come si otterrebbe utilizzando [17], ma un grafo in cui la continuità della strada principale A è spezzettata in tanti vertici adiacenti con la stessa etichetta (fig.2).

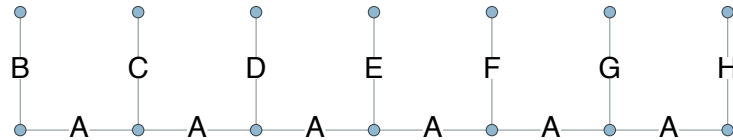


fig. 1 Il grafo di un fenomeno di *urban sprawl*, la strada centrale A è collegata ai vicoli ciechi B, C, D, E, F, G, H

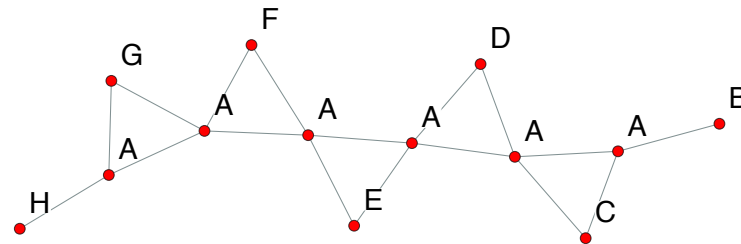


fig. 2 Il *line graph* del grafo di fig.1

Possiamo allora introdurre un opportuno procedimento di contrazione sul *line graph* e utilizzare il grafo contratto come definizione di **grafo urbano**. La contrazione [4] di un grafo su un *edge* è il grafo nel quale quell'*edge* (e quindi quella coppia di nodi) è stato sostituito da un nuovo vertice che eredita tutti gli *edge* dei due nodi eliminati. Formalmente la contrazione $G \setminus (x, y)$ di un grafo G sull'*edge* (x, y) è definita nel modo seguente.

Definizione 3 (Contrazione). *Dato un grafo $G = (V, E)$ e dati due vertici x e y , il grafo contratto sull'*edge* (x, y) , $G_c = G \setminus (x, y) = (V_c, E_c)$ è il grafo con vertici $V_c = (E \setminus \{x, y\}) \cup v$ dove v è un nuovo vertice, $v \notin V \cup E$, e $E_c = E \setminus (x, y) \cup \{(v, z) | (x, z) \in E \text{ o } (y, z) \in E\}$.*

Le informazioni che un *line graph* contratto dà sulla connettività degli spazi urbani, sono estremamente importanti dal punto di vista urbanistico e perfettamente coerenti, quando le etichette corrispondono alle linee assiali, con i risultati della *space syntax*. Ad esempio una strada con tante uscite secondarie viene trasformata dalla contrazione di fig.5 o dai metodi dei grafi assiali, in una topologia a stella [19] che identifica un fenomeno di *urban sprawl* (fig.3) in cui la chiusura della strada A elimina ogni possibile connessione tra le altre strade. Definiamo allora il **grafo urbano**, che generalizza il concetto di grafo assiale.

Definizione 4 (Grafo Urbano). *Dato un line graph $L(G_p)$ di un grafo primario geolocalizzato, il grafo urbano si ottiene contraendo i vertici adiacenti che hanno la stessa etichetta. Il nuovo nodo v ottenuto dalla contrazione di (x, y) avrà la stessa etichetta dei due nodi. Gli *edge* multipli vengono trasformati in un unico *edge*.*

In altri termini possiamo raggruppare gli spazi aperti in classi determinate dallo stesso valore di una variabile urbanistica e dall'adiacenza dei nodi del corrispondente *line graph*. Le operazioni di contrazione e di *line graph* non commutano: se contraiamo su G_p gli *edge* adiacenti con la stessa etichetta e poi costruiamo il *line graph*, otteniamo un grafo diverso dal grafo contratto di $L(G_p)$. Nel caso dell'*urban sprawl* di fig.4 la non commutatività è evidente.

Osserviamo anche che le interazioni tra i nodi del grafo contratto continuano ad essere determinate da intersezioni, ma non più dalle intersezioni delle linee assiali, ma da quelle di generici spazi determinati dalla classe di equivalenza dell'etichetta, e quindi dalle classi di equivalenza di generiche grandezze urbanistiche.

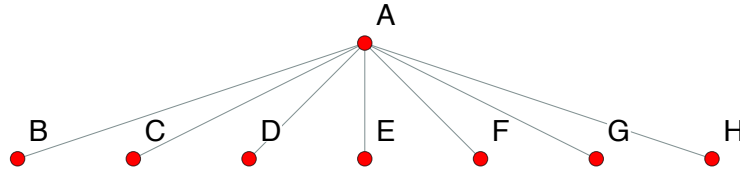


fig. 3 Il grafo a stella che si ottiene contraendo *line graph* del grafo di fig.2

Utilizzando la definizione di grafo urbano possiamo scrivere alcuni moduli con Mathematica per costruire $L(G_p)$ e per studiarne le caratteristiche di interesse urbanistico.

3 La costruzione del grafo urbano con Mathematica

Per realizzare il **grafo urbano** con Mathematica è necessario implementare alcune funzioni che riportiamo in modo schematico, sottolineando che per chiarezza non sono ottimizzate dal punto di vista della velocità di calcolo.

Per prima cosa abbiamo bisogno di una funzione `Contrazione[grafo, n1, n2, nomi]` che dato un **grafo**, e un insieme di etichette **nomi**, contrae i due nodi **n1** e **n2** e restituisce la nuova matrice di adiacenza e la nuova lista di etichette.

```
Contrazione[grafo_,n1_,n2_,nomi_]:=Module[
  {ma,ma2,ma3,ma4,nomi2},
  ma=Normal[AdjacencyMatrix[grafo]];
  ma2=ma;
  ma2[[A11,n1]]+=ma2[[A11,n2]];
  ma2[[n1,A11]]+=ma2[[n2,A11]];
  ma3=Drop[Clip[ma2],{n2,n2},{n2,n2}];
  ma4=ma3-DiagonalMatrix[Diagonal[ma3]];
  nomi2=Drop[nomi,{n2,n2}];
  Return[{ma4,nomi2}]
]
```

La funzione `Contrazione[grafo,n1,n2,nomi]` dà il grafo sotto forma di una matrice di adiacenza, ma può essere più comodo avere una funzione `Contrazione2[grafo,n1,n2,nomi]` che dia direttamente il grafo e il sistema di etichette:

```
Contrazione2[grafo_,n1_,n2_,nomi_]:=Module[
  {ma,ma2,ma3,ma4,nomi2,gc,grafocontratto},
  ma=Normal[AdjacencyMatrix[grafo]];
  ma2=ma;
  ma2[[A11,n1]]+=ma2[[A11,n2]];
  ma2[[n1,A11]]+=ma2[[n2,A11]];
  ma3=Drop[Clip[ma2],{n2,n2},{n2,n2}];
  ma4=ma3-DiagonalMatrix[Diagonal[ma3]];
  nomi2=Drop[nomi,{n2,n2}];
  gc=AdjacencyGraph[ma4];
  grafocontratto= SetProperty[gc,
    VertexLabels->Table[i->nomi2[[i]],
      {i,1,Length[nomi2]}]];
  Return[{grafocontratto,nomi2}]
]
```

Abbiamo poi bisogno di una funzione `NodiAdiacenti[ilgrafo,inomi]` che legge un grafo e una lista di etichette sui nodi, individua i nodi con lo stesso nome e restituisce i primi due nodi adiacenti con la stessa etichetta:

```
NodiAdiacenti[ilgrafo_,inomi_]:=Module[
  {coppie,indice,posizione,n1,n2},
  coppie=Table[{inomi[[EdgeList[ilgrafo][[i,1]]]],
    inomi[[EdgeList[ilgrafo][[i,2]]]]},{i,1,Length[EdgeList[ilgrafo]]}];
```

```

indice=Table[Length@Tally@coppie[[i]],{i,1,Length[coppie]}};
If[MemberQ[indice,1],posizione=Position[indice,1][[1,1]],posizione=0];
Return[{EdgeList[ilgrafo][[posizione,1]],EdgeList[ilgrafo][[posizione,2]]}]
]

```

Per operare la contrazione introduciamo la funzione `ContrazioneGrafo[ilgrafo,inomi]` che individua due nodi adiacenti con la stessa etichetta e li contrae:

```

ContrazioneGrafo[ilgrafo_,inomi_]:=Module[
  {a,ilgrafod,inomid,n1,n2},
  ilgrafod=ilgrafo;
  inomid=inomi;
  If[Length[NodiAdiacenti[ilgrafo,inomi]]>1,
    n1=NodiAdiacenti[ilgrafo,inomi][[1]];
    n2=NodiAdiacenti[ilgrafo,inomi][[2]];
    {ilgrafod,inomid}=Contrazione2[ilgrafo,n1,n2,inomi];
  ];
  Return[{ilgrafod,inomid}]
]

```

Il modulo `ContraibileQ[ilgrafo,inomi]`, verifica la contraibilità del grafo:

```

ContraibileQ[ilgrafo_,inomi_]:=Module[
  {coppie,indice,posizione},
  coppie=Table[
    {inomi[[EdgeList[ilgrafo][[i,1]]]],
    inomi[[EdgeList[ilgrafo][[i,2]]]]},
    {i,1,Length[EdgeList[ilgrafo]]}
  ];
  indice=Table[Length@Tally@coppie[[i]],{i,1,Length[coppie]}};
  Return[MemberQ[indice,1]]
]

```

La funzione `ilGrafoPrimario[regole]` costruisce G_p da un insieme di regole, cioè dalle coppie (*edge*, etichetta) sugli *edge*. Per semplicità non associamo anche le coordinate spaziali dei nodi:

```

GrafoEtichette[regole_] := Module[
  {g, e},
  g = regole /. Rule -> (#1 &);
  e = regole /. Rule -> (#2 &);
  Return[{Graph[g, EdgeLabels -> regole,
    EdgeLabelStyle -> Directive[Red], VertexLabels -> "Name"], e}]
]

```

La funzione `LineGraphID[regole]` costruisce il *line graph* da un insieme di regole, etichettandone i nodi con le etichette degli *edge* di G_p :

```

LineGraphID[regole_] := Module[
  {a, b, e},
  a = ilGrafoPrimario[regole];
  b = LineGraph[a];
  e = regole /. Rule -> (#2 &);
  Return[SetProperty[b,
    VertexLabels -> Table[i -> e[[i]], {i, 1, Length[e]}]]]
]

```

Infine la funzione `LineGraphIdContratto[regole]` legge un insieme di regole e restituisce il `LineGraph` contratto:

```

LineGraphIDContratto[regole_] := Module[
  {ilgrafo, inomi, risultato},
  ilgrafo = LineGraphID[regole];
  inomi = regole /. Rule -> (#2 &);
  Return[ContrazioneCompletaGrafo[ilgrafo, inomi]]
]

```

Questi sono, in modo schematico, i moduli principali che possono essere utilizzati per realizzare i grafi urbani. Nel paragrafo successivo questi metodi verranno utilizzati per studiare un caso urbanistico reale.

4 La space syntax acustica

Per comprendere come funziona il metodo appena definito, possiamo costruire il grafico di fig.4 dal quale, per mezzo della funzione `LinegraphID` otteniamo il corrispondente *line graph* con le etichette sui vertici di fig.5. La funzione `LinegraphIDContratto` restituisce il grafo finale fig.6, dove possono esserci nodi con la stessa etichetta, ma non adiacenti.

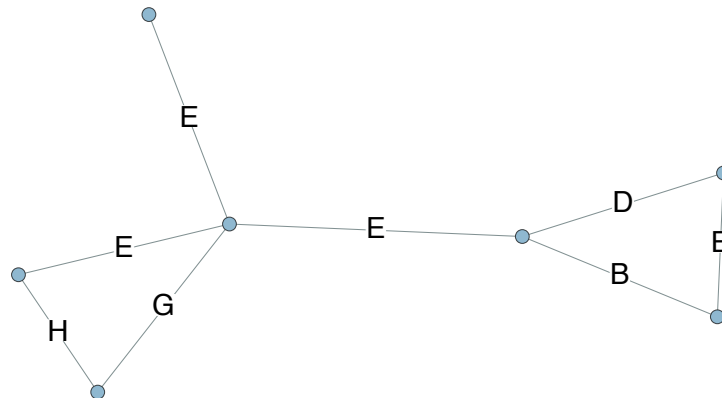


fig. 4 Il grafo primario con i nodi geolocalizzati e un sistema di etichette sugli *edge*

Come nel caso dell'*urban sprawl* il risultato è lo stesso che otterremmo con i grafi assiali se identificassimo con un'unica linea di vista gli *edge* adiacenti con la stessa etichetta. Il sistema di etichette può essere un insieme qualsiasi, ma deve avere una coerenza nel senso che l'etichetta deve rappresentare una proprietà

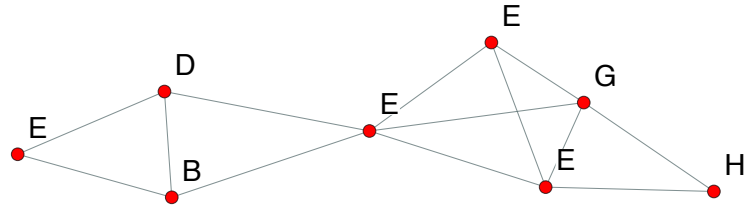


fig. 5 Il line graph di fig.4 (non contratto)

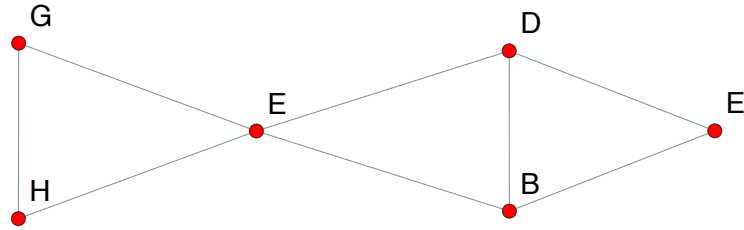


fig. 6 Il line graph di fig.4 dopo la contrazione

dell'*edge*. Esempi di etichette coerenti sono le linee assiali, l'inquinamento acustico, la densità abitativa, ma non le misure relative agli *edge* adiacenti, come per esempio il senso di marcia di una strada. Inoltre la relazione tra due nodi determinata dalla proprietà di possedere la stessa etichetta è una relazione di equivalenza.

Possiamo allora esaminare come caso reale il grafo che si ottiene da un'analisi del livello di inquinamento acustico del quartiere Testaccio di Roma di fig.7. Le misure dell'intensità del rumore urbano in *decibel* sono state fatte alla stessa ora in giorni diversi e non sono molto indicative della situazione acustica del quartiere, ma sono utili per mostrare le possibilità del metodo introdotto. In un lavoro successivo introdurremo una metodologia di misura acustica molto precisa basata sulla dinamica dei suoni, e studiamo l'effettivo funzionamento dell'acustica dell'area con il metodo proposto.

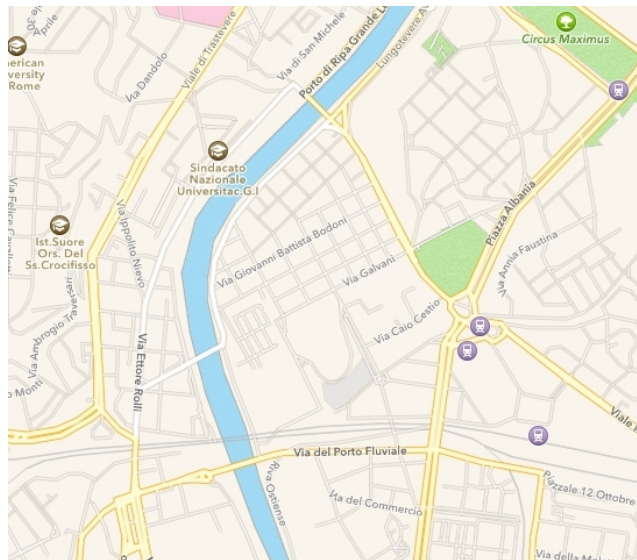


fig. 7 L'area di studio, il quartiere Testaccio di Roma

I dati utilizzati nell'esempio non sono mediati su un'intervallo di tempo, ma hanno solo un valore illustrativo. Il grafo primario G_p che si ricava dalla mappa di fig.7 è rappresentato in fig.8 mentre lo stesso grafo etichettato con le misure acustiche è riportato in fig.9. In entrambi i grafi i nodi sono geolocalizzati.

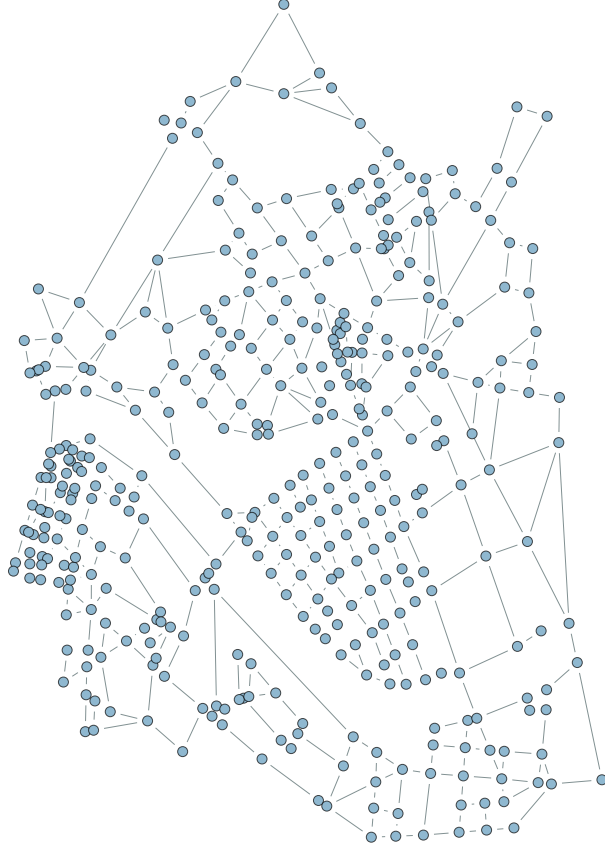


fig. 8 Il grafo dell'area di studio

Una misura del livello di inquinamento acustico associa la variabile $c \in C \equiv \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ad ogni *edge*, e indica un livello di inquinamento acustico misurato in decibel e discretizzato su una scala di cinque valori (fig.9). Se costruiamo il *line graph* non contratto del grafo primario con le etichette, otteniamo il grafo di fig.10. I nodi ereditano le misure acustiche degli *edge* corrispondenti e il grafo perde ogni riferimento alle coordinate spaziali. La rappresentazione del livello di inquinamento acustico dal punto di vista della *space syntax* dà importanti informazioni sull'accessibilità "acustica" degli spazi urbani e introduce un metodo per descrivere la zonizzazione acustica di un'area urbana. Le grandezze caratteristiche della *space syntax* [18, 10], come per esempio la profondità o l'asimmetria relativa, possono essere facilmente generalizzate al caso dei grafi acustici.

Per fare un esempio, dati due nodi i e j del grafo urbano, quindi due aree urbane connesse e con lo stesso livello di inquinamento acustico, la loro profondità relativa d_{ij} (*depth*) è il più piccolo numero di passi necessari per andare da i a j [10]. Sommando le profondità di un nodo i rispetto a tutti gli altri otteniamo la profondità totale (*total depth*) del un nodo i :

$$\mathcal{D}_i = \sum_{j=1}^N d_{ij} \quad (1)$$



fig. 9 Il grafo dell'area di studio con le misure di inquinamento acustico

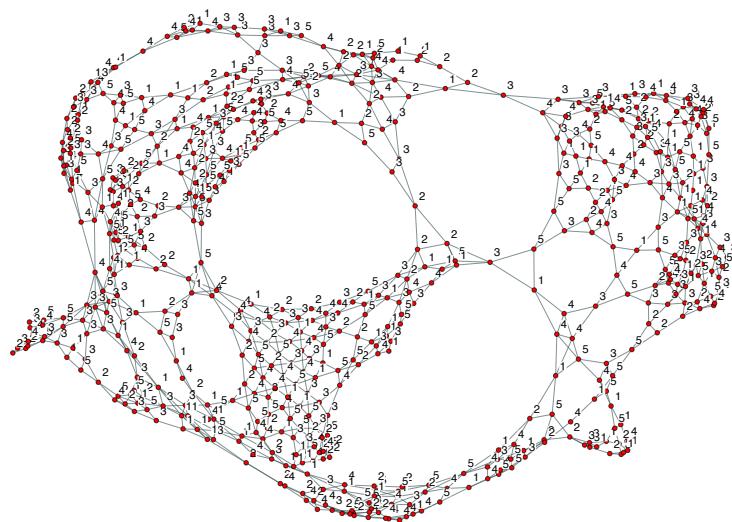


fig. 10 Il *line graph* dell'area di studio con le etichette sui vertici

dove N è il numero di nodi del grafo. Il suo valore medio (*mean depth*)

$$l_i = \frac{\mathcal{D}_i}{N - 1} \quad (2)$$

viene chiamato profondità media ed è una misura del grado di integrazione/segregazione del nodo i -esimo. Nel caso acustico, l_i misura il livello di integrazione nel tessuto urbano di un'area di maggiore o minore rumore.

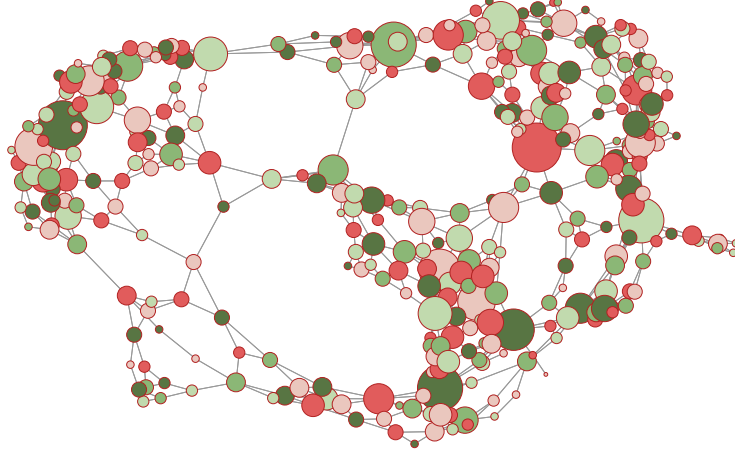


fig. 11 Il grafo urbano acustico dell'area di studio. Il diametro dei nodi rappresenta il loro grado e il colore (in una scala dal verde al rosso) il livello di inquinamento acustico

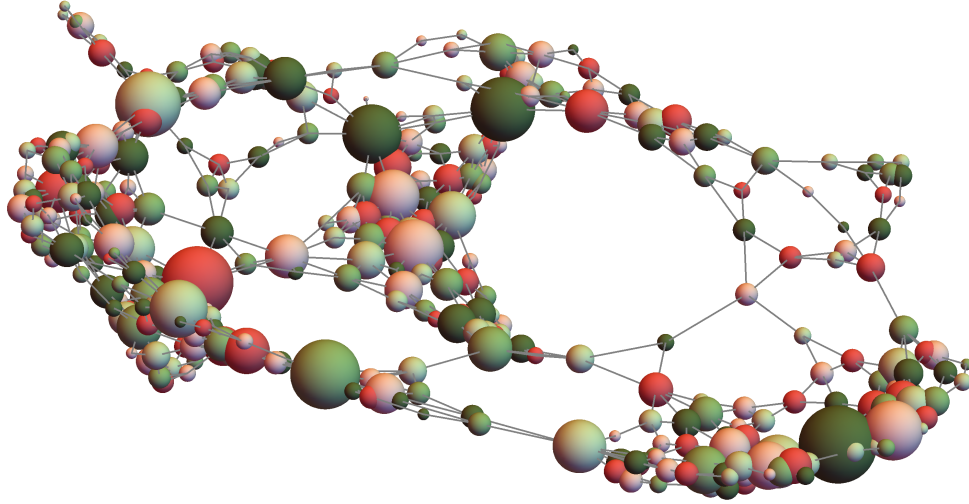


fig. 12 Lo stesso grafo di fig.11 in 3 dimensioni

Allo stesso modo la *global choice* \mathcal{C}_g [18][10] misura il flusso attraverso uno spazio i , cioè quante volte un nodo viene attraversato per andare da una parte all'altra della città, ed è definito come:

$$\mathcal{C}_g(i) = \frac{\# \text{ cammini più brevi che attraversano } i}{\# \text{ tutti i cammini più brevi}} \quad (3)$$

un nodo ha quindi un valore alto della *global choice* quando ci sono molti *shortest path* che connettono gli spazi che passano attraverso di esso. In teoria dei grafi $C_g(i)$ è definita come *betweenness centrality*. Nel caso acustico $C_g(i)$ indica, per esempio, quanto uno spazio con un dato livello di rumore possa attraversato da chi si muove nella città.

Tutte le grandezze della *space syntax* possono essere generalizzate al caso acustico e rappresentate sul grafo urbano nel piano o nello spazio. In fig.11 e fig.12 diamo un esempio di questa rappresentazione dove diametro dei nodi del grafo urbano (acustico) del quartiere Testaccio è proporzionale al grado, mentre il colore (dal verde al rosso) indica il livello di inquinamento sonoro.

5 Conclusioni

Il metodo proposto e implementato con Mathematica generalizza la *space syntax*. Il punto essenziale è la scelta e la misura di variabili urbanistiche che chiamiamo “etichette” associate agli *edge di un grafo*. In questo lavoro abbiamo considerato solo grandezze scalari, ma le etichette del metodo possono essere generalizzate ad un vettore di variabili urbanistiche. In questo caso però, per ottenere la contrazione, deve essere studiato un metodo di confronto tra vettori adiacenti. La generalizzazione vettoriale del metodo proposto può risultare anche molto utile per lo studio dell’*hedonic price* [15][5].

Nel caso dei grafi acustici dovremmo considerare una dinamica della *space syntax* perché in generale i suoni di una strada mutano in continuazione. Per ottenere dati realistici è necessario calcolarne le proprietà statistiche, o la dinamica, attribuendo ai suoni sugli spazi aperti valori distribuiti o la loro dinamica. Queste analisi possono dare luogo a una statistica sui grafi urbani e a uno studio dell’evoluzione temporale delle loro proprietà.

Il metodo proposto permette inoltre di analizzare fenomeni sociali ed economici connessi con la loro collocazione spaziale, come l’uso di servizi, la densità abitativa, i prezzi degli immobili, il grado di scolarizzazione. Il confronto tra i diversi grafi urbani può aiutare la comprensione delle relazioni tra questi diversi fenomeni. Infine il metodo descritto può servire per realizzare mappe della topologia urbana in relazione a diverse variabili urbanistiche e può essere di ausilio per la pianificazione di interventi di riqualificazione urbana.

L’autore vuole ringraziare Laura Velardi e Valerio Palma per la raccolta di dati acustici nelle vie di Testaccio e per le stimolanti osservazioni sui grafi urbani.

References

- [1] Hillier B, Hanson J, and Graham H. Ideas are in things: an application of the space syntax method to discovering house genotypes. *Environment and Planning B: Planning and Design*, 14(4):363–385, 1987.
- [2] Alessio Cardillo, Salvatore Scellato, Vito Latora, and Sergio Porta. Structural properties of planar graphs of urban street patterns. *Phys. Rev. E*, 73:066107, Jun 2006.
- [3] Paolo Crucitti, Vito Latora, and Sergio Porta. Centrality in networks of urban streets. *Chaos: an interdisciplinary journal of nonlinear science*, 16(1):015113, 2006.
- [4] Reinhard Diestel. *Graph Theory*. Number 173 in Graduate Texts in Mathematics. Springer, Heidelberg, 3 edition, 2005.
- [5] Ivar Ekeland. Existence, uniqueness and efficiency of equilibrium in hedonic markets with multidimensional types. *Economic Theory*, 42(2):275–315, February 2010.
- [6] Bill Hillier. Space as paradigm. *Proceedings of the Space Syntax Second Internationale Symposium*, I(vol. I):56.1–56.16, 1999.
- [7] Bill Hillier and Julienne Hanson. *The Social Logic of Space*. Cambridge University Press, 1984. Cambridge Books Online.

- [8] Bill Hillier and Alan Penn. Rejoinder to carlo ratti. *Environment and Planning B: Planning and Design*, 31(4):501–511, 2004.
- [9] B. Jiang and C. Claramunt. Topological analysis of urban street networks. *Environment and Planning B*, 31:151–162+, 2004.
- [10] Björn Klarqvist. A space syntax glossary. *Nordisk Arkitekturforskning*, (2):11–12, 1993.
- [11] Sergio Porta, Paolo Crucitti, and Vito Latora. The network analysis of urban streets: A dual approach. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 369(2):853–866, September 2006.
- [12] Jaime Rangel-Mondragon. Wolfram Demonstrations Project: Urban Road Networks.
- [13] C. Ratti. Space Syntax: some inconsistencies. *Environment and Planning B*, 31:513–516, 2004.
- [14] Carlo Ratti. Rejoinder to hillier and penn. *Environment and Planning B: Planning and Design*, 31(4):513–516, 2004.
- [15] Sherwin Rosen. Hedonic prices and implicit markets: Product differentiation in pure competition. *Journal of Political Economy*, 82(1):34–55, Jan.-Feb. 1974.
- [16] Alasdair Turner. From axial to road-centre lines: a new representation for space syntax and a new model of route choice for transport network analysis. *Environment and Planning B: Planning and Design*, 34(3):539–555, 2007.
- [17] Tasos Varoudis. depthmapx, multi-platform spatial network analysis software, 2014.
- [18] D. Volchenkov and Ph. Blanchard. Scaling and universality in city space syntax: Between zipf and matthew. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387(10):2353–2364, April 2008.
- [19] Philippe Blanchard & Dimitri Volchenkov. *Mathematical Analysis of Urban Spatial Networks*. Springer, Berlin, 2008.